Distributietheorie 2-7-'98

Tentamenopgave

I

Beschouw de differentiaaloperator $D = (\frac{d}{dx})^2 + 2\frac{d}{dx} + 1$.

1. Bepaal de fundamentele oplossing van D behorend tot $\mathcal{D}'_+$.

2. Bepaal de oplossing $T \in \mathcal{D}'_+$ van de vergelijking $DT = Y$ (de Heaviside één stap functie).

3. Bepaal, m.b.v. de symboolrekening, de oplossing f van het volgende klassieke beginwaardeprobleem, waarbij g een continue functie op $\mathbb{R}$ is:

$$(1) \qquad Df = g, \quad f(0) = -1, \ f'(0) = 1$$

4. Wat is de oplossing wanneer $g = 1$?

5. Zij F een functie van de klasse C^2 op $\mathbb{R}$. Onder welke voorwaarden op F bestaat er een continue functie f op $\mathbb{R}$ die voldoet aan de volgende convolutievergelijking? Bepaal in dat geval de oplossing f.

$$(2) \qquad \int_0^x f(x-y)ye^{-y}dy = F(x) \quad \forall\, x \geq 0$$

II

1. Definieer het begrip van convergentie van distributies $T_n \to T$, $n \in \mathbb{N}$, of $T = \lim_{n\to\infty} T_n$, waar $T_n, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Toon aan dat de afbeelding $\frac{d}{dx} : T \mapsto T'$ continu is van $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ naar $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Toon aan dat wanneer de reeks continue functies $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform op compacta convergeert, de reeks distributies $\sum_{n=1}^{\infty} T_{f_n}$ eveneens convergeert.

4. Geef een voorbeeld van een in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} T_{f_n}$ met f_n continu, zodat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ niet convergent is.

5. Construeer een rij continue functies f_n zodat $T_{f_n} \to \delta'$.

III

1. Laat S en T distributies op $\mathbb{R}^n$ zijn. Geef aan wanneer S en T aan de convolutievoorwaarde voldoen, en definieer in dat geval het convolutieproduct $S * T$.

2. Laat S en T distributies op $\mathbb{R}$ zijn die aan de convolutievoorwaarde voldoen. Toon aan dat de volgende 'productregel' geldig is:

$$x(S * T) = (xS) * T + S * (xT)$$

Aanwijzing: bewijs o.m. het bestaan van de convolutieproducten in het rechter lid.

3. Kun je dit generaliseren tot het geval van distributies op $\mathbb{R}^m$ met $m > 1$?